2017-2018 ÖĞRETİM YILI ANALİZ 2-A DERSİ ARASINAVI CEVAP KAĞIDI

1-) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-2}, & x>3 \\ x^2-9x+22, & x\le 3 \end{cases}$ fonksiyonu için $f'(3)$'ü bulunuz.

ÇÖZÜM: $f'(3^+)$ **ve** $f'(3^-)$ türevlerinin var ve eşit olduğunu gösterelim;

fonksiyonun tanımından $f(3)=4$ olup

$$f'(3^+)=\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\frac{x+1}{x-2}-4}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{-3x+9}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3^+}\frac{-3}{(x-2)}=-3$$

ve

$$f'(3^-)=\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9x+22-4}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{(x-3)(x-6)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3^-}\frac{(x-6)}{(x-2)}=-3$$

bulunur. Buradan

$$f'(3^+)=f'(3^-)=f'(3)=-3$$

elde edilir.

2-) $y=(\arcsin x)^{\frac{\sin x}{3x}}$ için $y'=?$

ÇÖZÜM:

$$y=(\arcsin x)^{\frac{\sin x}{3x}}\Rightarrow \ln y=\ln(\arcsin x)^{\frac{\sin x}{3x}}$$

$$\Rightarrow \ln y=\frac{\sin x}{3x}\ln(\arcsin x)$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y}=\frac{3x\cos x-3\sin x}{9x^2}\ln(\arcsin x)+\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin x}\frac{\sin x}{3x}$$

$$\Rightarrow y'=(\arcsin x)^{\frac{\sin x}{3x}}\left(\frac{3x\cos x-3\sin x}{9x^2}\ln(\arcsin x)+\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin x}\frac{\sin x}{3x}\right)$$

elde edilir.

3-) $\begin{cases} x(t)=\sin 2t-t^2 \\ y(t)=3t-t^3 \end{cases}$ için $y''=?$

ÇÖZÜM: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3-3t^2}{2\cos t-2t}$

ve $\dfrac{d^2y}{dx}=\dfrac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\left(\frac{3-3t^2}{2\cos t-2t}\right)'}{2\cos t-2t}=\dfrac{-6t(2\cos t-2t)-(3-3t^2)(-4\sin 2t-2)}{\left(2\cos t-2t\right)^3}$ olur.

4-) 100cm uzunluğunda bir tel herhangi bir noktadan iki parçaya bölünerek bir çember ve bir kare yapılmak isteniyor. Kare ile çemberin alanları toplamının maksimum olması için çemberin yarıçapı ne olmalıdır? Karenin kenar uzunluğu ne olmalıdır? Toplam alan nedir?

ÇÖZÜM: $100=100-x+x$ olmak üzere $100-x$ cm ile kare x cm ile çember yapılsın. Karenin bir kenarına a denirse $4a=100-x\Rightarrow a=\dfrac{100-x}{4}$ olur. Çemberin yarıçapına r denirse $2\pi r=x\Rightarrow r=\dfrac{x}{2\pi}$ olur. Alanlar toplamı πr^2+a^2 olduğundan alanlar toplamının değişkenine bağlı fonksiyonu

$$f\left(x\right)=\left(\frac{100-x}{4}\right)^2+\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$$

bulunur.

$$f'\left(x\right)=-\frac{2}{4}\left(\frac{100-x}{4}\right)+\frac{2\pi}{2\pi}\left(\frac{x}{2\pi}\right)=-\left(\frac{100-x}{8}\right)+\frac{x}{2\pi}=\frac{-\pi\left(100-x\right)+4x}{8\pi}=\frac{-100\pi+\pi x+4x}{8\pi}$$

olup

$$f'\left(x\right)=\frac{-100\pi+\pi x+4x}{8\pi}=0\ \Rightarrow\ x\left(\pi+4\right)=100\pi\ \Rightarrow\ x=\frac{100\pi}{4+\pi}$$

olur. Buradan

$$r=\frac{x}{2\pi}=\frac{100\pi}{4+\pi}\frac{1}{2\pi}=\frac{50}{4+\pi}\qquad \text{ve}\qquad a=\frac{100-x}{4}=\frac{100-\frac{100\pi}{4+\pi}}{4}=\frac{100}{4+\pi}$$

bulunur.

$$\text{Toplam alan}=\left(\frac{100}{4+\pi}\right)^2+\pi\left(\frac{50}{4+\pi}\right)^2=\frac{100^2}{4\pi+\pi^2}$$

dır.

5-) $f\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)$ fonksiyonunun Maclaurin formülünü yazınız.

ÇÖZÜM:

$$f(x)=\ln(x+1)\Rightarrow f(0)=0$$
$$f'(x)=\frac{1}{x+1}\Rightarrow f'(0)=1$$
$$f''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}\Rightarrow f''(0)=-1$$
$$f'''(x)=+\frac{1.2}{(x+1)^3}\Rightarrow f'''(0)=1.2,$$
$$f^{(4)}(x)=-\frac{1.2.3}{(x+1)^4}\Rightarrow f^{(4)}(0)=(-1)1.2.3$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}\Rightarrow f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!\quad (n\neq 0 \text{ için})$$

olup

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0+x+\frac{(-1)}{2!}x^2+\frac{2!}{3!}x^3+\frac{(-1)3!}{4!}x^4+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

elde edilir.

6-) $f(x)=\ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulup fonksiyonun monotonluğunu, bükeyliğini ve ekstremum noktalarını inceleyiniz. Varsa yerel ekstremum noktalarını, dönüm noktalarını bulunuz.

ÇÖZÜM: Fonksiyonun tanım kümesi

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ \frac{x-2}{x+3}>0\right\}=(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$$

olur.

Fonksiyon eksenleri kesmez.

$$\lim_{x\to 2^+}\ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right)=-\infty \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to -3^-}\ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right)=+\infty$$

olduğundan $x=2$ ve $x=3$ düşey asimptottur.

$\lim_{x\to\pm\infty}\ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right)=0$ olduğundan $y=0$ yatay asimptottur.

$$f(x)=\ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right)\Rightarrow f(x)=\ln(x-2)-\ln(x+3)$$
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3}=\frac{5}{(x-2)(x+3)}$$

olduğundan $(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$ kümesinde $f'(x)>0$ olur.

$$f''(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}=\frac{-10x-5}{(x-2)^2(x+3)^2}=\frac{-10x-5}{(x-2)^2(x+3)^2}=\frac{-5(2x+1)}{(x-2)^2(x+3)^2}$$

yazılır. $(-\infty,-3)$ aralığında $f''(x)>0$ olduğundan f konvekstir. $(2,+\infty)$ aralığında $f''(x)<0$ olduğundan f konkavdır.

x	$-\infty$ -3		2 $+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f''(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$ $\cup$		$-\infty$ $\nearrow$ 0 $\cap$

Olur.

7-) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin h\left(x^2\right)}{\cosh x-1}$ limitini bulunuz.

ÇÖZÜM: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin h\left(x^2\right)}{\cosh x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)}{\cosh x-1}\to\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. L`Hospital kullanırsa

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\arcsin h\left(x^2\right)}{\cosh x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\arcsin h\left(x^2\right)\right)'}{\sinh x}$$

yazılır. Ayrıca

$y=\arcsin hx\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ olduğu biliniyor. Eğer $y=\arcsin h\left(x^2\right)$ ifadesinde $u=x^2$ denirse

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}2x=\frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}$$

bulunur. Buradan

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\arcsin h\left(x^2\right)}{\cosh x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\arcsin h\left(x^2\right)\right)'}{\sinh x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{\sqrt{x^4+1}}}{\sinh x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sinh x}\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{x^4+1}}=1.2=2$$

elde edilir.

8-) Lagrange teoremini ifade edip ispatlayınız.

ÇÖZÜM: Lagrange (Ortalama Değer) teoreminin ispatı ders notlarında mevcuttur.

9-) $y^2 - e^{x^4-y^2} = 0$ denklemiyle kapalı şekilde verilen $y = y(x)$ fonksiyonunun $y=1$ ordinatlı noktalarının birinden çizilen teğet ve normal denklemi nedir?

ÇÖZÜM: $y^2 - e^{x^4-y^2} = 0$ denkleminde $y=1$ alınırsa

$$e^{x^4-1} = 0 \Rightarrow x^4 - 1 = 0 \Rightarrow (x^2-1)(x^2+1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

bulunur. $A = (1,1)$ noktasından geçen teğet ve normal denklemlerini bulalım

$$y^2 - e^{x^4-y^2} = 0 \Rightarrow 2yy' - (4x^3 - 2yy')e^{x^4-y^2} = 0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{4x^3 e^{x^4-y^2}}{2y + 2ye^{x^4-y^2}}$$

teğetin eğimine m_T normalin eğimine m_N denirse

$m_T = y'(1,1) = 1$ ve $m_N = -1$ bulunur. O halde $A = (1,1)$ noktasından geçen teğet denklemi;

$$y - 1 = x - 1 \Rightarrow y = x$$

ve $A = (1,1)$ noktasından geçen normal denklemi;

$$y - 1 = -(x-1) \Rightarrow y = -x$$

elde edilir.